

中华人民共和国教育部 主管
北京师范大学 主办
北京师范大学出版集团 承办



2019 · 12

上半月刊 总第317期

教育部优秀科技期刊
教育类中文核心期刊(2000年版)

高中数理化

卢嘉翎题



解答立体几何问题的几类失分点

巧借补形法解立体几何问题

跟着“感生”走进科研应用

楞次定律推广再理解

构建思维模型，突破电化学知识难点

注重能力进阶，构建电学知识体系

本期编审

数学 朱恒元

物理 李 勛

化学 袁廷新



邮发代号: 82-656

高中数理化

2019/12上 (总第317期)

中华人民共和国教育部 主管
北京师范大学 主办
北京师范大学出版集团 承办

编委会委员(以姓氏笔画为序)

丁益祥 刘文彪 陈浩元 陈雄
张鹤 郑克强 孟卫东

北京师范大学出版集团期刊社

社长:姜钰
副社长:曹巍 陈雄
综合办公室:谭苗苗 翟冰冰 颜贺华

《高中数理化》杂志

主编:刘文彪
编辑部主任:陈林
编辑部:曾慧楠 李彦玲 于亚娜
出版:北京师范大学出版社
(集团)有限公司
编辑:《高中数理化》编辑部
地址:北京师范大学科技楼A区220室
电话:010-58807851
网址:www.51gao.com
投稿邮箱:tougao2006@sina.com(上半月)
gzslh2010@163.com(下半月)
刊号:CN 11-3866/G4
ISSN 1007-8312

国内总发行:北京报刊发行局

邮发代号:82-656
订阅处:全国各地邮局
出刊日期:上半月每月1日
下半月每月15日
定价:12.00元/期
开户名称:北京师范大学出版社(集团)有限公司

开户行:北京农村商业银行北太平庄支行
账号:1105500103000008445
印刷:北京京师印务有限公司

网络合作伙伴  新浪考试
www.sina.com.cn

中国人民大学“复印报刊资料”重要转载来源期刊
《中国期刊网》《中国学术期刊》(光盘版)全文收录期刊
中国学术期刊综合评价数据库来源期刊
万方数据—数字化期刊群收录期刊
超星期刊域出版平台收录期刊

目次



专栏

·卫东老师谈物理

小物和小理的物理对话录(第44)

——漫谈电磁波 / 郭红羽 龙孟志 编 33-28

·笃年老师问与答

关于原电池原理的问题讨论 / 王笃年 59



高考·单招

·高考全关注

对2019年高考北京卷理科数学选择压轴题目的思考 /
韩静波 1

挖掘概念内涵,提升物理观念,发展科学思维
——以探究功与功率为例 /

李开武 李想 李金萍 29-20

·专题合类译析

一网打尽 探究解法
——化学反应与能量常考题型解答技巧 / 潘厚福 35-55



知识·方法

·重点·精品

用定义妙解圆锥曲线问题 / 孙全训 张辉 4

探究立体几何线面问题的思路与方法 / 周文国 7

巧借平面几何性质,解答立体几何问题 / 李建明 9

电磁感应中导体杆和导体框收尾速度的分类研究 /

张成海 31

电磁感应现象综合问题归类剖析



巧借平面几何性质， 解答立体几何问题

甘肃 李建明

空间几何图形都是由平面几何图形构成的，如棱锥是由一个多边形和多个三角形构成的，棱柱是由两个全等的多边形和多个平行四边形构成的，等等。因此，在立体几何问题的解答中往往需要借助平面几何图形的性质来寻找问题的切入点，下面针对平面几何图形的性质在立体几何问题中的应用进行举例说明。

1 三角形的性质

1.1 三角形的中位线

线面平行与面面平行是空间中的两种重要的平行关系，但不论哪种平行关系的判定都是以线线平行入手，因此寻找平面图形中的线线平行关系是解题的关键。其中构造三角形的中位线，利用中位线的性质是得出线线平行的重要方式。

例 1 如图 1，四棱锥 $A-BCDE$ 的底面 $BCDE$ 为菱形，侧面 ABE 为等边三角形，且侧面 ABE 垂直底面 $BCDE$ ，若 O, F 分别为 BE, DE 的中点。

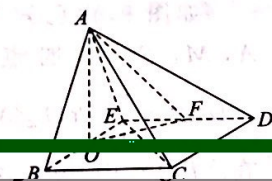


图 1

- (1) 求证: $AO \perp CD$;
- (2) 侧棱 AC 上是否存在点 P ，使得 $BP \parallel$ 平面 AOE ? 若存在，求出 $\frac{AP}{PC}$ 的值；若不存在，请说明理由。

解析 (1) 略；
(2) 如图 2 所示。

设 CE 与 BD, OF 的交点分别为 M, N ，连接 AN, PM 。因为四边形 $BCDE$ 为菱形， O, F 分别为 BE, DE 的中点，所以 $\frac{NM}{MC} = \frac{1}{2}$ 。设 P 为 AC 上靠近点 A 的三等分点，则 $\frac{AP}{PC} = \frac{NM}{MC} = \frac{1}{2}$ ，所以 $PM \parallel AN$ 。因为 $AN \subset$ 平面 $AOE, PM \not\subset$ 平面 AOE ，所以 $PM \parallel$ 平面 AOE 。因为 $BD \parallel CE, CE \subset$ 平面 $AOE, BD \not\subset$ 平面 AOE ，所以 $BD \parallel$ 平面 AOE ，即 $BM \parallel$ 平面 AOE 。因为 $BM \cap PM$ 于 M ，所以平面 $BMP \parallel$ 平面 AOE 。因

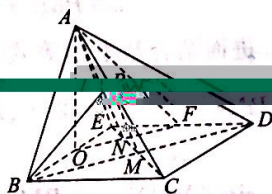


图 2

为 $BP \subset$ 平面 BMP ，所以 $BP \parallel$ 平面 AOE 。由 $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$ 。

为 $BP \subset$ 平面 BMP ，所以 $BP \parallel$ 平面 AOE 。

综上所述，侧棱 AC 上存在点 P ，使得 $BP \parallel$ 平面 AOE ，且 $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$ 。



构造中位线需要寻找中点，可以直接选取某一线段的中点，也可构造中点（如利用平行四边形或三角形中位线定理等）。

1.2 等腰三角形三线合一

线线垂直关系是判定空间中线面垂直与面面垂直的重要依据，在等腰三角形中顶角的平分线、底边上的中线与底边上的高线重合，这种“三线合一”的性质，迅速构造线线垂直关系，从而找到解题的突破口。

例 2 如图 3，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp$ 底面 $ABCD, PA=AC$ 。过点 A 的平面与棱 PR, PC, PD 分别交于点 E, F, G (E, F, G 与棱的端点均不重合)。

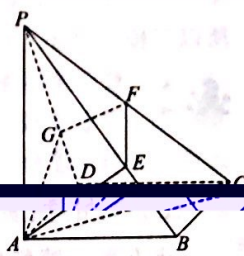


图 3

- (1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC ;
- (2) 若 $PC \perp$ 平面 $AEGF$ ，求 $\frac{PF}{PC}$ 的值。

(1) 略；
(2) 略。



解析 (1) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，所以 $PA \perp BC$ 。又因为 $BC \perp AB$ ，所以 $BC \perp$ 平面 PAB 。又 $BC \subset$ 平面 PBC ，所以平面 $PAB \perp$ 平面 PBC 。
(2) 因为 $PC \perp$ 平面 $AEGF$ ，所以 $PC \perp AF$ 。由等腰三角形三线合一的性质，可知点 F 为 PC 的中点，所以 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}$ 。



由线面垂直可知线与面内的任意直线垂直，从而结合等腰三角形三线合一的性质找到动点所在的位置。

1.3 直角三角形的判定

直角三角形主要的性质有：勾股定理、斜边上的中线等于斜边的一半、两个锐角互余等。在判断两条相交的直线是否垂直时，若这两条直线与另外一条直线围成的三角形满足勾股定理的逆定理，则可得两线的垂直关系。

例 3 如图 4 所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CA = CB, AB = AA_1, \angle BAA_1 = \frac{\pi}{3}$ 。

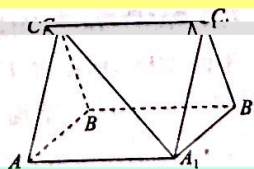


图 4

- (1) 证明: $AB \perp A_1C$;



(2) 设 $AB=CB=2, A_1C=\sqrt{5}$, 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.

$A_1B_1C_1$ 的体积.

(1) 略.

(2) 如图 5 所示.

取 AB 的中点 D , 连接 A_1D, CD, A_1B . 由已知条件, 可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABA_1$ 均是边长为 2 的等边三角形, 所以 $CD=A_1D=\sqrt{3}$. 又因为 $A_1C=\sqrt{5}$, 所以 $CD^2+A_1D^2=A_1C^2$, 所以 $CD \perp A_1D$. 又因为 $A_1D \perp AB, CD \cap AB$ 于 D , 所以 $A_1D \perp$ 平面 ABC , A_1D 为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高. 因为 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$, 所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 3.

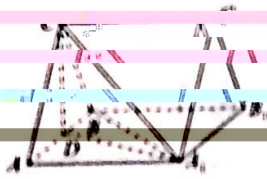


图 5

欲证某两条直线垂直, 应有意识地去验证这两条直线与第三条直线所围成的三角形三边满足勾股定理的逆定理, 从而得到所需的垂直关系.

2 正方形的性质

正方形是特殊的平面图形.

正方形具有平行四边形的性质, 且四边相等, 四个角均为直角, 对角线相等、垂直且平分、对角线是边长的 $\sqrt{2}$ 倍等性质. 如图 6 所示, E, F 分别是正方形 $ABCD$ 的中点, 易证 $AE \perp BF$.

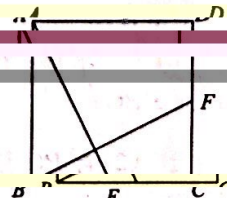


图 6

例 4 如图 7 所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, AA_1 的中点为 M , 点 P 在侧面 ABB_1A_1 内, 有 $D_1P \perp CM$, 则 PB 的最小值为 _____.

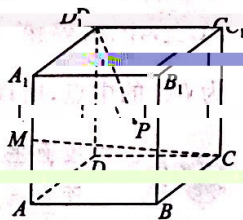


图 7

如图 8 所示, 设 AB 的中点为 E , 连接 $BM, B_1E, D_1B_1, D_1E, D_1P$, 利用上述正方形的性质可知 $D_1E \perp D_1B_1$, 而 $D_1E \perp BC, BM \cap BC$ 于 B , 故 $B_1E \perp$ 平面 MBC , 所以 $B_1E \perp CM$.

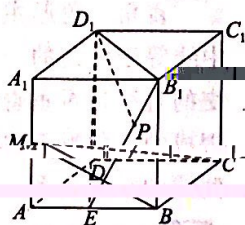


图 8

又 $D_1B_1 \perp$ 平面 $A_1ACC_1, CM \subset$ 平面 A_1ACC_1 , 所以 $D_1B_1 \perp CM$, 而 $D_1B_1 \cap B_1E$ 于 B_1 , 所以 $CM \perp$ 平面 D_1B_1E , 所以 $D_1P \subset$ 平面 D_1B_1E , 即点 $P \in B_1E$. 所以 PB 的最小值即为点 B 到 B_1E 的距离. 选

一步可求得 $PB_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

本题从题目的已知条件来看, 具备应用上述性质. 解题的关键是使问题顺利求解的关键. 由已知的性质、定理入手添加辅助线, 是解答立体几何问题的重要方式.

3 圆形的性质

到定点的距离为定值的点的轨迹为圆, 与圆有关的性质较多, 如直径所对的圆周角为直角, 同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍, 圆内接四边形的内对角互补, 以及正弦定理等.

例 5 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD, AA_1=2$, 底面四边形 $ABCD$ 的边长均大于 2, 且 $\angle DAB = \frac{\pi}{4}$, M, N 分别是底面 $ABCD$ 内的动点 P 在 AB, AD 上的射影, 若 $PA=2$, 则三棱锥 D_1-PMN 体积的最大值为 _____.

欲使三棱锥 D_1-PMN 体积最大, 即使 $S_{\triangle PMN}$ 最大. 由 $|PA|=2$, 可知点 P 在以 A 为圆心的圆上.

如图 9, 由已知条件可得 A, M, P, N 四点共圆, 而

$$\angle DAB = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle MPN = \frac{3\pi}{4}$$

在 $\triangle PMN$ 中, 由正弦定理可得

$$\frac{MN}{\sin \angle MPN} = 2R, MN = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

由余弦定理可得

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cos \angle MPN, \\ 2 = PM^2 + PN^2 + \sqrt{2} PM \cdot PN,$$

进而结合基本不等式得 $(2 + \sqrt{2}) PM \cdot PN \leq 2, PM \cdot PN \leq \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$. 所以 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} PM \cdot PN \cdot \sin \angle MPN = \frac{\sqrt{2}}{4} PM \cdot PN \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \times (2 - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. 因此, $V_{D_1-PMN} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3}$.

综上所述, 三棱锥 D_1-PMN 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$.

本题求解中两次构造了圆, 一次是由 $|PA|=2$ 构造 A 为圆心, 半径为 2 的圆, 另一次是利用直径所对的圆周角为直角, 构造以 AP 为直径的圆. 最后, 再结合三角形中的正弦、余弦定理及基本不等式求得最值.

综上所述, 三棱锥 D_1-PMN 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2} - 1}{3}$.

本题求解中两次构造了圆, 一次是由 $|PA|=2$ 构造 A 为圆心, 半径为 2 的圆, 另一次是利用直径所对的圆周角为直角, 构造以 AP 为直径的圆. 最后, 再结合三角形中的正弦、余弦定理及基本不等式求得最值.





4 菱形的性质

菱形的四条边相等,对角线互相垂直且平分,这一性质往往是寻找立体几何中线线垂直的重要条件.另外某些特殊的几何体往往可视为由特殊的平面图形折叠而成.

例 6 如图 10,四面体 $ABCD$ 的六条棱中,有五条棱的长为 1,一条棱长为 x ,则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为_____.

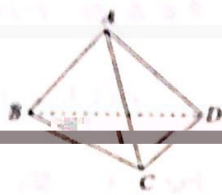


图 10

解析 根据所给几何体的特征,即一条棱长为 x ,其余棱长均为 1,可将该四面体化为边长为 1,一个内角为 60° 的菱形翻折而成,进而使问题简捷获解.

不妨设菱形为 $ACBD$, $\angle CAD = 60^\circ$,将菱形沿对角线 CD 翻折,可得题目所述四面体,且 $AB = x$.易知当平面 ACD 与平面 BCD 垂直时,四面体 $ABCD$ 的体积取得最大值 $\frac{1}{8}$,此时 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

点评 本题求解中将空间问题平面化,即结合四面体 $ABCD$ 的特征,将其视为由特殊的菱形翻折而成,从而利用菱形的性质求解.

5 平行四边形的性质

平行四边形的性质包括对边平行且相等、对角线互相平分等.在立体几何问题中往往需要先判定一个四边形为平行四边形,再利用平行四边形的性质得到线线平行关系.

例 7 如图 11 所示,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, AA_1B_1B 为正方形, BB_1C_1C 为菱形, $\angle BB_1C_1 = \frac{\pi}{3}$,平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 BB_1C_1C .

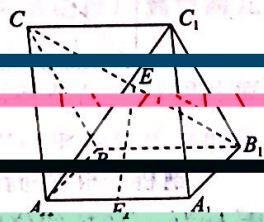


图 11

- (1) 求证: $B_1C \perp AC_1$;
- (2) 设点 E, F 分别是 B_1C, AA_1 的中点,试判断直线 EF 与平面 ABC 的位置关系,并说明理由.

解析 (1) 略;
(2) 如图 12, 设 G 为 BC 的中点, 连接 GE, GA . 因为 E 是 B_1C 的中点, 所以 $GE \parallel BB_1$, 且 $GE = \frac{1}{2}BB_1$. 因为 F 是 AA_1 的中点, 所以

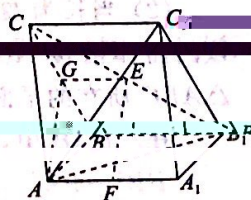


图 12

$$AF = \frac{1}{2}AA_1$$

在正方形 AA_1B_1B 中, $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$, 所以 $GE \parallel AF$, 且 $GE = AF$, 所以四边形 $GEFA$ 为平行四边形, 则有 $EF \parallel GA$. 因为 $GA \subset$ 平面 ABC , 所以 $EF \parallel$ 平面 ABC .

点评 本题求解中结合三角形中位线的性质, 利用平行四边形判定定理, 一组对边平行且相等的四边形为平行四边形, 进而再利用平行四边形的性质来说明另外一组对边平行, 从而得到线线平行关系.

6 矩形的性质

矩形的性质, 主要包括四个角都是直角, 对边平行且相等, 对角线平分且相等.

例 8 如图 13 所示, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp AP, PD$, $PA \perp BC$, D, E, F, G 分别为 AP, AC, BC, PB 的中点.

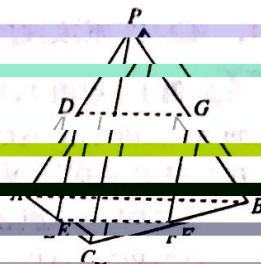


图 13

- (1) 求证: 四边形 $DEFG$ 为矩形;
- (2) 是否存在点 Q , 到三棱锥 $P-ABC$ 各条棱的距离相等? 说明理由.

解析 (1) 由 D, E, F, G 分别为 AP, AC, BC, PB 的中点, 可得 $DE \parallel PC, DE = \frac{1}{2}PC, GF \parallel PC, GF = \frac{1}{2}PC$, 所以四边形 $DEFG$ 为平行四边形.

又因为 $PC \perp AB$, 所以 $DE \perp EF$, 所以四边形 $DEFG$ 为矩形.

(2) 由第 (1) 问可知当点 Q 为矩形 $DEFG$ 对角线的交点时, 点 Q 到点 D, E, F, G 的距离相等.

如图 14, 设 BC 的中点为 M , AP 的中点为 N , 连接 EM, EN, FM, FN, GM, GN , 再

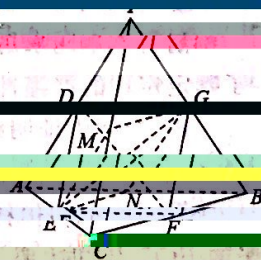


图 14

第 (1) 问的证明方法, 可得四边形 $EMGN$ 为矩形, 且与矩形 $DEFG$ 有共同的 diagonal EG , 所以当点 Q 为 EG 的中点时, 其到三棱锥 ABC 六条棱的中点距离相等.

点评 本题的求解中应用了矩形的性质, 即矩形的对角线相等且互相平分的性质, 则对角线的交点到各顶点的距离相等.

(作者单位: 甘肃省兰州市兰州现代职业学院)

